Journal of Pure and Applied Algebra 31 (1984) 199-215
North-Holland

PROFONDEUR, HAUTEUR ET LOCALISATIONS EN ALGEBRE NON COMMUTATIVE

J. RAYNAUD
Dépt. de Mathématiques, Université Claude-Bernard, Lyon I, 69622 Villeurbanne Cedex, France

Communicated by F. Van Oystaeyen
Received December 1982

Introduction

Avec la théorie des localisations, on étend et on généralise à l'algèbre non nécessairement commutative la notion de profondeur d'un module (sans faire intervenir de conditions de finitude mais en n'introduisant pas ici de notion de suites M-régulières (une telle notion peut être définie mais c'est une notion bilatère)). On montre que les principaux résultats du commutatif (voir [10], [24] et [2]), y compris l'interprétation cohomologique de la profondeur de la géométrie algébrique ([10], [11]), sont conservés.

En utilisant la filtration définie par P. Gabriel (dans [4, p. 382]), on définit la notion de hauteur d'une localisation, et en particulier la notion de hauteur d'une localisation première ce qui généralise la notion de hauteur d'un idéal premier de l'algèbre commutative. On démontre quelques résultats techniques à ce sujet analogues à ceux établis pour la notion de dimension de Gabriel (dans [15], [16], [5] et [22]).

Pour certains anneaux commutatifs, la profondeur de l'anneau par rapport à un idéal premier est liée à la hauteur de cet idéal premier par des conditions introduites par J.P. Serre (voir [24, p. 176]): on étend ces conditions aux anneaux non commutatifs et on donne différents exemples d'anneaux qui les vérifient (généralisant ainsi certains résultats du commutatif (voir [24])).

Les résultats démontrés ici avaient été annoncés dans [29].

Notations et terminologie

Dans la suite tous les anneaux, modules et morphismes considérés seront unitaires, et les anneaux non nécessairement commutatifs.

Pour tout anneau A, on désignera par Mod A la catégorie des A-modules à droite.

0022-4049/84/$3.00

Sauf mention expresse du contraire toutes les notions utilisées seront supposées à droite (c'est-à-dire, par A-module on entendra A-module à droite; idéal de A signifiera idéal à droite de A; ...). Si M' est un sous-module d'un A-module M et si m est un élément de M, l'idéal $\{a \in A \mid ma \in M'\}$ de A sera désigné par $M' .\cdot m$; l'annulateur $\mathrm{Ann}(m)$ de m est $0 .\cdot m$.

Nous appellerons *filtre localisant* (à droite) d'un anneau A tout ensemble non vide $\mathscr{F}$ d'idéaux de A qui vérifie les conditions suivantes:

(T_1) Si I' est un idéal de A contenant un élément $I \in \mathscr{F}$, alors $I' \in \mathscr{F}$.

(T_2) Si $I \in \mathscr{F}$ et si $I' \in \mathscr{F}$, alors $I \cap I' \in \mathscr{F}$.

(T_3) Si $I \in \mathscr{F}$ et si $a \in A$ alors $I .\cdot a \in \mathscr{F}$.

(I) Pour tout idéal I de A s'il existe un élément $I' \in \mathscr{F}$ tel que pour tout $a \in I'$ on ait $I .\cdot a \in \mathscr{F}$, alors $I \in \mathscr{F}$.

Cette notion de filtre localisant coïncide avec celle d'ensemble topologisant et idempotent d'idéaux de A définie par P. Gabriel dans [4]. Nous noterons $\mathscr{T}(A)$ l'ensemble des filtres localisants (à droite) de l'anneau A.

Si $\mathscr{F} \in \mathscr{T}(A)$, nous dirons qu'un A-module M est de $\mathscr{F}$-torsion (ou de torsion s'il n'y a pas de risque de confusion) si l'annulateur de tout élément de M appartient à $\mathscr{F}$. Tout A-module N possède un plus grand sous-module de $\mathscr{F}$-torsion noté $\mathscr{F}(N)$. Un A-module M sera dit sans $\mathscr{F}$-torsion (ou sans torsion) si on a $\mathscr{F}(M) = 0$.

D'autres terminologies sont utilisées par ailleurs. Pour plus de détails sur tout ce qui précède on pourra se reporter à [4], [8], [12], [6] et [24].

L'ensemble $\mathscr{T}(A)$ des filtres localisants d'un anneau A est muni d'une structure de treillis complet brouwérien par la relation $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ (qu'on lit $\mathscr{F}'$ est plus fin que $\mathscr{F}$ et qu'on note aussi $\mathscr{F} \leq \mathscr{F}'$). La borne inférieure d'une famille $(\mathscr{F}_i)_{i \in \Lambda}$ d'éléments de $\mathscr{T}(A)$, noté $\bigwedge_{i \in \Lambda} \mathscr{F}_i$, est $\bigcap_{i \in \Lambda} \mathscr{F}_i$; la borne supérieure, notée $\bigvee_{i \in \Lambda} \mathscr{F}_i$, est le filtre localisant de A constitué par les idéaux I de A tels que, pour tout idéal J de A distinct de A et contenant I, il existe $i \in \Lambda$ vérifiant $\mathscr{F}_i(A/J) \neq 0$. (Voir [22], [23] et [6] pour cette structure de $\mathscr{T}(A)$.)

Si $\mathscr{A}$ est une famille de A-modules, on désignera par $\xi(\mathscr{A})$ le plus petit élément de $\mathscr{T}(A)$ tel que tout élément de $\mathscr{A}$ soit de torsion, et on désignera par $\chi(\mathscr{A})$ le plus grand élément de $\mathscr{T}(A)$ tel que tout élément de $\mathscr{A}$ soit sans torsion; si $\mathscr{A} = \{M\}$ on notera respectivement $\xi(M)$ et $\chi(M)$ ces éléments. Alors $\xi = \xi(0)$ (resp. $\chi = \chi(0)$) est le plus petit (resp. le plus grand) élément de $\mathscr{T}(A)$.

Soit $\mathscr{F}$ un filtre localisant d'un anneau A. Nous dirons qu'un *A-module M* est *$\mathscr{F}$-cocritique* si M est non nul, sans $\mathscr{F}$-torsion et si, pour tout sous-module non nul N de M, le module quotient M/N est de $\mathscr{F}$-torsion; un *idéal I* de A sera dit *$\mathscr{F}$-critique* si le A-module A/I est $\mathscr{F}$-cocritique. Un *A-module M* (resp. un *idéal I* de A) sera dit *cocritique* (resp. *critique*) s'il est $\chi(M)$-cocritique (resp. $\chi(A/I)$-cocritique). De tels modules ont été introduits dans [8] et considérés sous différents noms par la suite; la terminologie adoptée ici est celle de [6] (suscitée par [13]) et utilisée dans [20], [21], [22], [23].

Nous dirons qu'un *filtre localisant* $\mathscr{P}$ de A est *premier* s'il existe un A-module cocritique M tel que $\mathscr{P} = \chi(M)$ (voir [8] où cette notion a été introduite). L'ensemble des filtres localisants premiers de l'anneau A sera appelé le *spectre* (à droite) de A et désigné par $\mathrm{Speg}(A)$.

Pour tout A-module M l'ensemble $\mathrm{Ass}(M)$ des $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ tels que M ait un sous module $\mathscr{P}$-cocritique est appelé *l'assassin* de M; l'ensemble $\mathrm{Supp}(M)$ des $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ tels que M ne soit pas de $\mathscr{P}$-torsion est appelé le *support* de M. (Voir [6] pour les propriétés analogues à celles du commutatif). Si I est un idéal (à droite) de A, on posera

$$V(I) = \mathrm{Supp}(A/I) = \{\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A) \mid I \notin \mathscr{P}\}.$$

A tout filtre localisant $\mathscr{F}$ d'un anneau A on peut associer une partition $(c(\mathscr{F}), \lambda(\mathscr{F}))$ du spectre de A en posant $c(\mathscr{F}) = \{\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A) \mid \mathscr{F} \leq \mathscr{P}\}$ et

$$\lambda(\mathscr{F}) = \mathrm{Speg}(A) - c(\mathscr{F}) = \bigcup_{I \in \mathscr{F}} V(I) = \bigcup_{I \in \mathscr{F}} \mathrm{Ass}(A/I),$$

voir [22] et [23] où cette partition est étudiée.

Pour toute partie Y de $\mathrm{Speg}(A)$, on posera $d(Y) = \bigwedge_{\mathscr{P} \in Y} \mathscr{P}$, et $\mu(Y) = d(\mathrm{Speg}(A) - Y)$ qui est l'ensemble des idéaux I de A tels que $V(I) \subseteq Y$, voir aussi [22] et [23] pour plus de détails.

On appellera *filtres localisants semi-premiers* de A les éléments $\mathscr{F} \in \mathscr{T}(A)$ tels que $\mathscr{F} = (d \circ c)(\mathscr{F})$: ces filtres localisants sont les ensembles stables à droite définis et caractérisés dans [15] et [16], et la terminologie adoptée ici est celle de [6] (voir aussi [22] et [23]). On désignera, comme dans [22] et [23], par $\mathscr{S}(A)$ l'ensemble des filtres localisants semi-premiers de l'anneau A.

On dira qu'un anneau A est un *D-anneau à droite* si pour tout A-module non nul M on a $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$. Si A est un D-anneau à droite on a, en particulier, $\mathscr{S}(A) = \mathscr{T}(A)$. (Voir [6], [20], [21], [22] et [23] pour plus de détails sur ces anneaux.) En particulier, les anneaux semi-noethériens à droite (c'est-à-dire les anneaux dont la dimension de Gabriel de la catégorie $\mathrm{Mod}\, A$ est définie; cf. [4, p. 382]) caractérisés dans [15] et [16], les anneaux ayant une dimension de Krull à droite (cf. [9]), et donc les anneaux noethériens à droite sont des D-anneaux à droite.

Nous dirons qu'un *A-module* cocritique M est *surcocritique* si on a la relation $\mathrm{Supp}(M) = \{\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A) \mid \mathscr{P} \leq \chi(M)\}$, et nous dirons qu'un *idéal* critique I de A est *surcritique* si le A-module A/I est surcocritique. Nous dirons qu'un *filtre localisant* $\mathscr{F}$ de A est *copremier* si on a $\mathscr{F} = \mu(\mathrm{Supp}(M))$ où M est un A-module surcocritique. Enfin nous dirons que *l'anneau A vérifie la condition* (Min.) *à droite* si tout A-module cocritique possède un sous-module surcocritique. Voir [20], [21], [22] et [23] où ces notions sont introduites et étudiées en détail.

1. Profondeur d'un module

Proposition 1.1. *Soit A un D-anneau à droite. Considérons M un A-module non nul et I un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) $I \in \chi(M)$.
(2) $\forall a \in A$ $\operatorname{Hom}(A/I.\cdot a, M) = 0$.
(3) $\operatorname{Ass}(M) \cap V(I) = \emptyset$.

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (2). C'est bien connu et c'est vrai sans hypothèse sur l'anneau A (cf. [8] par exemple).

(2) $\Rightarrow$ (3). Si $\mathscr{P} \in \operatorname{Ass}(M) \cap V(I)$ alors il existe un idéal J de A qui est $\mathscr{P}$-critique et il existe $a \in A$ tels que $I.\cdot a \subseteq J$ et tel que A/J soit isomorphe à un sous-module de M (d'après les Lemme 1.1 et Proposition 1.3 de [16]). Ceci implique qu'on a $\operatorname{Hom}(A/I.\cdot a, M) \neq 0$: une contradiction. Donc $\operatorname{Ass}(M) \cap V(I) = \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1). D'après le Théorème 5.1 de [8] et la Proposition 0.2 de [12] on a: $I \in \chi(M)$ équivaut à, pour tout élément non nul x de M et pour tout $a \in A$, on a $x(I.\cdot a) \neq 0$. Pour tout élément non nul x de M on a $\emptyset \neq \operatorname{Ass}(xA) \subseteq \operatorname{Ass}(M)$ (puisque A est un D-anneau); donc si $\mathscr{P} \in \operatorname{Ass}(xA)$ on déduit de l'hypothèse qu'on a $I \in \mathscr{P}$. Ceci implique, pour tout $a \in A$, que $I.\cdot a \in \mathscr{P}$ et par suite on obtient $x(I.\cdot a) \neq 0$ (puisque $\mathscr{P} \in \operatorname{Ass}(xA)$). Donc $I \in \chi(M)$. $\square$

Cette proposition étend et généralise en partie la Proposition 6.2 de [24, p. 173]. On déduit immédiatement de cette Proposition 1.1:

Corollaire 1.2. *Soit A un D-anneau à droite. Pour tout A-module non nul M on a*

$$\chi(M) = \bigwedge_{\mathscr{P} \in \operatorname{Ass}(M)} \mathscr{P} = d(\operatorname{Ass}(M)).$$

Soit A un anneau. Considérons M un A-module non nul et

$$0 \to M \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to \cdots$$

une résolution injective minimale de M. Pour tout entier $n \leq 0$, désignons par $\chi_n(M)$ le filtre localisant coengendré par $E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ c'est-à-dire

$$\chi_n(M) = \chi(E_0 \oplus \cdots \oplus E_n) = \bigwedge_{i=0}^{n} \chi(E_i).$$

On a

Proposition 1.3. ([24, p. 149]). *Un A-module N est de $\chi_n(M)$-torsion si et seulement si $\operatorname{Ext}^i_A(N', M) = 0$ pour tout $i \leq n$ et pour tout sous-module (cyclique) N' de N.*

Definition. Si I est un idéal d'un anneau A et si M est un A-module non nul, on posera:

$$\begin{aligned} \operatorname{prof}_I(M) &= 0 && \text{si } I \notin \chi_0(M) \text{ (c'est-à-dire si } I \notin \chi(M)), \\ \operatorname{prof}_I(M) &= n && \text{si } I \in \chi_{n-1}(M) \text{ et si } I \notin \chi_n(M), \\ \operatorname{prof}_I(M) &= \infty && \text{si } I \in \chi_n(M) \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{aligned}$$

et $\operatorname{prof}_I(M)$ s'appellera la *I-profondeur de M*.

Il est facile de voir que la définition précédente coïncide avec la notion classique de la profondeur d'un module du commutatif pour laquelle A était un anneau commutatif noethérien et M un A-module de type fini (voir [24, p. 174]). Notre définition est donc plus générale et ne fait pas intervenir de conditions de finitude.

Definition. Si $\mathscr{P}$ est un filtre localisant premier d'un anneau A (c'est-à-dire si $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$) et si M est un A-module non nul, on posera:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = 0 & \text{si } \chi_0(M) \leq \mathscr{P} \text{ (c'est-à-dire si } \mathscr{P} \notin \lambda(\chi(M))), \\
\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = n & \text{si } \chi_{n-1}(M) \not\leq \mathscr{P} \text{ et si } \chi_n(M) \leq \mathscr{P} \\
 & \text{(c'est-à-dire si } \mathscr{P} \in \lambda(\chi_{n-1}(M)) \cap c(\chi_n(M))), \\
\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = \infty & \text{si } \chi_n(M) \not\leq \mathscr{P} \text{ pour tout entier } n \geq 0 \\
 & \text{(c'est-à-dire si } \mathscr{P} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda(\chi_n(M))),
\end{array}$$

et $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M)$ s'appellera la *$\mathscr{P}$-profondeur de M.*

Proposition 1.4. *Si A est un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier (i.e. $\mathscr{S}(A) = \mathscr{T}(A)$) et si A vérifie la condition* (Min.) *à droite alors, pour tout $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ et pour tout A-module non nul M, il existe un idéal $\mathscr{P}$-critique I de A qui est surcritique et tel que* $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = \mathrm{prof}_I(M)$.

Démonstration. (1) $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = 0$ équivaut à $\chi(M) \leq \mathscr{P}$ ce qui équivaut, d'après la Proposition 1.3 de [16], à pour tout idéal $\mathscr{P}$-critique I de A on a $I \notin \chi(M)$, c'est-à-dire $\mathrm{prof}_I(M) = 0$.

(2) Si n est un entier strictement positif alors, puisque $\mathscr{S}(A) = \mathscr{T}(A)$ et puisque A vérifie la condition (Min.) à droite, on a $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = n$ équivaut à $\alpha(\mathscr{P}) \leq \chi_{n-1}(M)$ et $\alpha(\mathscr{P}) \not\leq \chi_n(M)$ d'après la Proposition 3.1 de [23], où $\alpha(\mathscr{P})$ désigne le filtre localisant copremier associé à $\mathscr{P}$ (voir [20], [22] ou [23]). Donc, avec la Proposition 2.1 de [23], il vient $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = n$ équivaut à il existe un idéal $\mathscr{P}$-critique I de A qui est surcritique et tel que $I \in \chi_{n-1}(M)$ et $I \notin \chi_n(M)$, c'est-à-dire $\mathrm{prof}_I(M) = n$.

(3) Posons $\chi_\infty(M) = \bigwedge_{n \geq 0} \chi_n(M)$. Puisque $\mathscr{S}(A) = \mathscr{T}(A)$ et puisque A vérifie la condition (Min.) à droite, le Théorème 3.4 de [23] implique que la relation $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = \infty$ équivaut à $\chi_\infty(M) \not\leq \mathscr{P}$. Donc $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M) = \infty$ équivaut, d'après la Proposition 3.1 de [23], à $\alpha(\mathscr{P}) \leq \chi_\infty(M)$ ce qui équivaut, d'après la Proposition 2.1 de [23], à il existe un idéal $\mathscr{P}$-critique I de A qui est surcritique et tel que $I \in \chi_\infty(M)$, c'est-à-dire $\mathrm{prof}_I(M) = \infty$.

D'où le résultat. □

Pour un anneau commutatif A, si P est un idéal premier de A et $\mathscr{P}$ le filtre localisant premier associé alors, il est facile de voir que la définition précédente de $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M)$ coïncide avec la notion classique de $\mathrm{prof}(M_P)$ (voir [24, p. 175]), et est donc plus générale (et ne fait pas intervenir de conditions de finitude).

Montrons maintenant que les principaux résultats du commutatif sont conservés.

Proposition 1.5. *Soit A un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier (i.e. $\mathscr{S}(A)=\mathscr{T}(A)$). Si I est un idéal de A et si M est un A-module non nul on a*

$$\mathrm{prof}_I(M)=\inf_{\mathscr{P}\in V(I)}(\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M)).$$

Démonstration. D'après le Théorème 2.2.1 de [22] (ou d'après [23, fin de la page 84]) on a: $I\in\chi_n(M)$ équivaut à $V(I)\subseteq\lambda(\chi_n(M))$. Le résultat s'en déduit alors aisément. □

Cette Proposition 1.5 généralise donc le Lemme 6.5 de [24, p. 175].

Corollaire 1.6. *Soit A un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier. Alors, pour tout A-module non nul M et pour tout entier $n\geq 0$, on a la caractérisation suivante du filtre localisant $\chi_n(M)$: $\chi_n(M)$ est l'ensemble des idéaux (à droite) I de A tels que* $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M)\geq n+1$ *pour tout* $\mathscr{P}\in V(I)$.

Démonstration. Elle est immédiate d'après la Proposition 1.5. □

Ce Corollaire 1.6 généralise donc la Proposition 6.6 de [24, p. 175].

Soit $\mathscr{F}$ un filtre localisant d'un anneau A. Si M est un A-module non nul et si $0\to M\to E_0\to E_1\to E_2\to\cdots$ est une résolution injective minimale de M, on dit que M a une *dimension $\mathscr{F}$-dominante* égale à n, avec $n\in\mathbb{N}$, si E_i est sans $\mathscr{F}$-torsion pour tout $i<n$ et si E_n n'est pas sans $\mathscr{F}$-torsion; on note $\mathscr{F}$-dom.dim$(M)=n$. Si on a $\mathscr{F}$-dom.dim$(M)\neq n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ on écrit $\mathscr{F}$-dom.dim$(M)=\infty$. Voir [25] pour plus de détails sur cette dimension. D'après ce qui précède on aura donc $\mathscr{F}$-dom.dim$(M)=n$ si et seulement si $\mathscr{F}\leq\chi_{n-1}(M)$ et $\mathscr{F}\not\leq\chi_n(M)$. Alors il vient:

Théorème 1.7. *Soit A un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier. Alors, pour tout filtre localisant $\mathscr{F}$ de A et pour tout A-module non nul M, on a*

$$\mathscr{F}\text{-dom.dim}(M)=\inf_{I\in\mathscr{F}}(\mathrm{prof}_I(M))=\inf_{\mathscr{P}\in\lambda(\mathscr{F})}(\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M)).$$

Démonstration. Puisque $\lambda(\mathscr{F})=\bigcup_{I\in\mathscr{F}}V(I)$, la Proposition 1.5 nous donne

$$\inf_{I\in\mathscr{F}}(\mathrm{prof}_I(M))=\inf_{\mathscr{P}\in\lambda(\mathscr{F})}(\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(M)).$$

La relation $\mathscr{F}$-dom.dim$(M)=0$ équivaut à $\mathscr{F}\not\leq\chi(M)$, c'est-à-dire qu'il existe $I\in\mathscr{F}$ tel que $\mathrm{prof}_I(M)=0$; l'assertion de notre théorème est donc vérifiée. Comme la relation $\mathscr{F}$-dom.dim$(M)=n$, avec $n\neq 0$, est vérifiée si et seulement si on a $\mathscr{F}\leq\chi_{n-1}(M)$ et $\mathscr{F}\not\leq\chi_n(M)$, le résultat se déduit immédiatement du début de la démonstration et du Corollaire 1.6. Enfin la relation $\mathscr{F}$-dom.dim$(M)=\infty$ signifie qu'on a $\mathscr{F}\leq\chi_n(M)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et là aussi le résultat du théorème s'obtient d'après le début de la démonstration et d'après le Corollaire 1.6. Donc le théorème est établi. □

Ce Théorème 1.7 généralise le Théorème 4.3 de [2] (et voir aussi les Théorème 5.6, Corollaire 5.7 et Problème 5.8 de [1]).

Corollaire 1.8. *Soit A un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier. Alors, pour tout idéal I de A et pour tout A-module non nul M, on a*

$$\operatorname{prof}_I(M) = \xi(A/I)\text{-dom.dim}(M).$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.1 de [23] on a $\lambda(\xi(A/I)) = V(I)$, et donc le corollaire se déduit de la Proposition 1.5 et du Théorème 1.7. □

Ce corollaire généralise le Théorème 2.1 de [2].

Corollaire 1.9. *Soit A un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier, et qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Alors, si $\mathscr{P}$ est un filtre localisant premier de A* (*i.e.* $\mathscr{P} \in \operatorname{Speg}(A)$) *et si $\alpha(\mathscr{P})$ est le filtre localisant copremier de A associé à $\mathscr{P}$* (*cf.* [23]), *alors on a, pour tout A-module non nul M:*

$$\operatorname{prof}_{\mathscr{P}}(M) = \alpha(\mathscr{P})\text{-dom.dim}(M).$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.4 il existe un idéal $\mathscr{P}$-critique I de A qui est surcritique et tel que $\operatorname{prof}_{\mathscr{P}}(M) = \operatorname{prof}_I(M)$; d'après les Propositions 2.1 et 3.1 de [23] on a $\alpha(\mathscr{P}) = \xi(A/I)$. Donc le résultat se déduit du Corollaire 1.8. □

Corollaire 1.10. *Sous les hypothèses du Corollaire* 1.9 *on a, pour tout filtre localisant $\mathscr{F}$ de A et pour tout A-module non nul M:*

$$\mathscr{F}\text{-dom.dim}(M) = \inf_{\mathscr{P} \in \lambda(\mathscr{F})} (\alpha(\mathscr{P})\text{-dom.dim}(M)).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 1.7 et le Corollaire 1.9. □

En ce qui concerne *l'interprétation cohomologique de la profondeur* (dans le commutatif voir [11, p. 217], ou voir [10]) on a:

Considérons $\mathscr{F}$ un filtre localisant d'un anneau A et désignons, pour tout entier $n \geq 0$, par $R^n\mathscr{F}(\cdot)$ le n-ième foncteur de cohomologie locale associé à $\mathscr{F}$ (c'est-à-dire le n-ième foncteur dérivé à droite du foncteur qui à un A-module N fait correspondre son sous-module de torsion $\mathscr{F}(N)$); voir [7] pour plus de détails à ce sujet et en particulier pour la démonstration du résultat suivant qui est la Proposition 1.2 de [7] et que nous énonçons ici pour la commodité du lecteur:

Proposition 1.11. *Si $\mathscr{F}$ est un filtre localisant d'un anneau A et si n est un entier naturel alors, pour tout A-module non nul M, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\mathcal{F}$-dom.dim$(M)\geq n$.
(2) $R^i\mathcal{F}(M)=0$ *pour tout* $i<n$.

On obtient alors l'interprétation cohomologique de la profondeur.

Corollaire 1.12. *Soit A un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier alors, pour tout idéal (à droite) I de A et pour tout A-module non nul M, on a:* $\mathrm{prof}_I(M)\geq n$ *si et seulement si* $R^i\xi(A/I)(M)=0$ *pour tout* $i<n$ *(où n est un entier naturel).*

Démonstration. On applique le Corollaire 1.8 et la Proposition 1.11. □

Corollaire 1.13. *Soit A un anneau tel que tout filtre localisant soit semi-premier, et qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Considérons* $\mathcal{P}$ *un filtre localisant premier de A et* $\alpha(\mathcal{P})$ *le filtre localisant copremier de A associé à* $\mathcal{P}$. *Alors, pour tout A-module non nul M et pour tout entier naturel n, on a:* $\mathrm{prof}_{\mathcal{P}}(M)\geq n$ *si et seulement si* $R^i\alpha(\mathcal{P})(M)=0$ *pour tout* $i<n$.

Démonstration. On applique le Corollaire 1.9 et la Proposition 1.11. □

2. Hauteur d'une localisation

Soit A un anneau et considérons $\mathcal{F}$ un filtre localisant (à droite) de A.
Définissons une chaîne transfinie d'éléments de $\mathcal{T}(A)$ de la manière suivante:
- $\mathcal{F}_{-1}=\mathcal{F}$,
- si ι n'est pas un ordinal limite: $\mathcal{F}_\iota=\mathcal{F}_{\iota-1}\vee\xi(\{M_A \mid M_A$ est $\mathcal{F}_{\iota-1}$-cocritique$\})$,
- si ι est un ordinal limite: $\mathcal{F}_\iota=\bigvee_{\kappa<\iota}\mathcal{F}_\kappa$.

On pose $\mathcal{F}_\omega=\bigvee_\iota\mathcal{F}_\iota$. Si $\mathcal{F}_\omega=\chi$ on dira que *la hauteur (de Gabriel) de* $\mathcal{F}$ est définie, et le plus petit ordinal ι tel que $\mathcal{F}_\iota=\chi$ sera appelé *la hauteur de* $\mathcal{F}$ et sera noté $\iota=\mathrm{Ht}(\mathcal{F})$.

Si $\mathcal{C}$ désigne la sous-catégorie localisante de Mod A associée à $\mathcal{F}$ et si $\mathcal{A}=\mathrm{Mod}\,A/\mathcal{C}$ est la catégorie quotient, alors les filtres localisants $\mathcal{F}_\iota$ correspondent biunivoquement aux sous-catégories localisantes $\mathcal{A}_\iota$ de $\mathcal{A}$ définies par P. Gabriel dans [4, p. 382]; donc la hauteur de $\mathcal{F}$ est définie si et seulement si la dimension de Gabriel de $\mathcal{A}$ (appelée dimension de Krull dans [4]) est définie et on a $\mathrm{Ht}(\mathcal{F})=\text{G-dim}(\mathcal{A})$.

Donc, en particulier, la hauteur de $\xi\in\mathcal{T}(A)$ n'est autre que la dimension de Gabriel à droite de l'anneau A ($\mathrm{Ht}(\xi)=\text{G-dim}(\mathrm{Mod}\,A)=\text{G-dim}(A)$). De plus, si A est un anneau semi-noethérien à droite (i.e. si la dimension de Gabriel de Mod A est définie), alors la hauteur de $\mathcal{F}$ est définie pour tout $\mathcal{F}\in\mathcal{T}(A)$.

Remarque 2.1. La hauteur d'un filtre localisant $\mathcal{F}$ de A est nulle si et seulement si la catégorie quotient associée $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\, A/\mathcal{C}$ est semi-artinienne (où $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie localisante associée à $\mathcal{F}$).

Remarque 2.2. Si A est un anneau tel que toute localisation soit semi-première et si $\mathcal{P}$ est un filtre localisant premier de A alors, la hauteur de $\mathcal{P}$ est nulle si et seulement si $\mathcal{P}$ est un élément maximal de Speg(A), si et seulement si $\mathcal{P}$ est un élément maximal de $\mathcal{T}(A) - \{\chi\}$. (La fin de la remarque n'est autre que la Proposition 2.3 de [16], et pour démontrer le début il suffit de passer à la catégorie quotient et d'utiliser la Proposition 1.3 et le Lemme 1.0 de [16] avec la Remarque 2.1 ci-dessus).

Remarque 2.3. Si A est un D-anneau localement premier qui vérifie la condition (RP) (voir [22, Chapitre III]), alors, d'après le Théorème 3.2.9 de [22], il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux bilatères premiers minimaux de A et l'ensemble des éléments maximaux de Speg(A); donc, d'après la Remarque 2.2, il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux bilatères premiers minimaux de A et l'ensemble des filtres localisants premiers de hauteur 0 (à un idéal bilatère premier P correspond $\chi(A/P)$ élément de Speg(A)). (Des exemples de tels anneaux sont donnés dans [22, Chapitre III]: en particulier les anneaux ayant une dimension de Krull [9] et donc les anneaux noethériens en sont).

Comme dans [22] et [23], nous dirons qu'un filtre localisant de A est un *filtre localisant fortement semi-premier de A* s'il est intersection réduite de filtres localisants premiers de A (ce sont les ensembles stables réduits à droite que nous avions caractérisés dans [15] et [16]).

En adaptant les démonstrations des Théorème 3.4, Corollaires 3.5 et 3.6 de [16], on obtient:

Théorème 2.4. *Pour un filtre localisant $\mathcal{F}$ d'un anneau A, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *La hauteur de $\mathcal{F}$ est définie.*

(2) *Tout filtre localisant de A plus fin que $\mathcal{F}$ est fortement semi-premier.*

(3) *Tout filtre localisant de A plus fin que $\mathcal{F}$ est semi-premier, et toute intersection d'une famille non vide d'éléments de $c(\mathcal{F})$ peut être réduite.*

(4) *Tout filtre localisant $\mathcal{F}'$ de A plus fin que $\mathcal{F}$, et distinct de χ, possède un A-module $\mathcal{F}'$-cocritique.*

Corollaire 2.5. *Si la hauteur d'un filtre localisant $\mathcal{F}$ d'un anneau A est définie, alors toute partie non vide de $c(\mathcal{F})$ possède au moins un élément minimal.*

Corollaire 2.6. *Si la hauteur d'un filtre localisant $\mathcal{F}$ d'un anneau A est définie et si $\mathcal{P}$ est un élément non maximal de $c(\mathcal{F})$, alors il existe $\mathcal{P}' \in c(\mathcal{F})$ tel que $\mathcal{P} \lneq \mathcal{P}'$ et tel que pour tout élément $\mathcal{P}''$ de $c(\mathcal{F})$ vérifiant $\mathcal{P} \leq \mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}'$ on a $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}'$.*

Notons également que si la hauteur d'un filtre localisant $\mathscr{F}$ d'un anneau A est définie alors, on peut développer, avec les résultats de [22], des considérations topologiques sur $c(\mathscr{F})$, muni de la topologie de Stone, qui donnent des propriétés analogues à celles établies dans [20], [22] et [23] pour Speg(A) lorsque A était un anneau semi-noethérien à droite.

Proposition 2.7. *Si $\mathscr{F}$ est un filtre localisant plat ('perfect'* [24, *p.* 229]) *d'un anneau A alors, la hauteur de $\mathscr{F}$ est définie si et seulement si l'anneau localisé $A_{\mathscr{F}}$ est semi-noethérien à droite, et si cela est, on a* $\mathrm{Ht}(\mathscr{F}) = \text{G-dim}(A_{\mathscr{F}})$.

Démonstration. Le morphisme canonique de A dans son localisé $A_{\mathscr{F}}$ est un épimorphisme plat à droite [24, p. 229] et la proposition se déduit donc des résultats de [19]. □

Corollaire 2.8. *Si $\varrho : A \to B$ est un épimorphisme plat à droite* [24, *p.* 229] *et si A est un anneau semi-noethérien à droite, alors B est un anneau semi-noethérien à droite.*

Démonstration. Immédiate d'après ce qui précède. □

Remarquons enfin que si A est un anneau qui vérifie la condition (Min.) à droite et si la hauteur d'un filtre localisant $\mathscr{F}$ de A est définie alors, d'après le Théorème 2.4 et d'après la Proposition 3.15 de [23], tout filtre localisant $\mathscr{F}'$ de A plus fin que $\mathscr{F}$ est clair (c'est-à-dire que tout élément minimal de $c(\mathscr{F}')$ est de la forme $\chi(M)$ avec M A-module $\mathscr{F}'$-cocritique; cf. [23, p. 97]).

Soit $\mathscr{F}$ un filtre localisant d'un anneau A. De manière analogue à [16], [5] et [22] considérons les ensembles suivants de Speg(A):

(1) Pour tout ordinal $\iota \geq -1$:

$$\begin{aligned} G_\iota(\mathscr{F}) &= \{\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A) \mid \mathscr{F}_\iota \leq \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{F}_{\iota+1} \not\leq \mathscr{P}\} \\ &= c(\mathscr{F}_\iota) \cap \lambda(\mathscr{F}_{\iota+1}), \end{aligned}$$

et posons $E_\iota(\mathscr{F}) = \bigcup_{\kappa<\iota} G_\kappa(\mathscr{F})$. Posons aussi $E_\omega(\mathscr{F}) = \bigcup_\iota E_\iota(\mathscr{F})$.

(2) $U_{-1}(\mathscr{F}) = \emptyset$ et $U_0(\mathscr{F}) = \{$éléments minimaux de $c(\mathscr{F})\}$;

- si ι n'est pas un ordinal limite, alors

$$U_\iota(\mathscr{F}) = \{\mathscr{P} \in c(\mathscr{F}) \mid \forall \mathscr{P}' \in c(\mathscr{F}) \quad \mathscr{P}' \lneq \mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{P}' \in U_{\iota-1}(\mathscr{F})\};$$

- si ι est un ordinal limite, alors $U_\iota(\mathscr{F}) = \bigcup_{\kappa<\iota} U_\kappa(\mathscr{F})$.

On a les propriétés suivantes:

Propriété 2.9. *Les ensembles $G_\iota(\mathscr{F})$ sont disjoints deux à deux et, pour tout ordinal ι, on a $\mathscr{P} \in G_\iota(\mathscr{F})$ si et seulement si il existe un A-module $\mathscr{P}$-cocritique qui est $\mathscr{F}_\iota$-*

cocritique; avec les notations du début du paragraphe: il y a correspondance biunivoque entre $G_\iota(\mathscr{F})$ et l'ensemble des types d'objets simples de la catégorie quotient $\mathscr{A}/\mathscr{A}_\iota$. De plus si $G_\iota(\mathscr{F}) \neq \emptyset$ alors $d(G_\iota(\mathscr{F}))$ est un filtre localisant fortement semi-premier dont l'ensemble des composants essentiels (i.e. les éléments $\mathscr{P}$ de Speg(A) *tels qu'il existe un A-module $\mathscr{P}$-cocritique qui est $d(G_\iota(\mathscr{F}))$-cocritique; cf.* [23, *p.* 96]) *est $G_\iota(\mathscr{F})$ qui est contenu dans l'ensemble des éléments minimaux de $c(\mathscr{F}_\iota)$.*

Propriété 2.10. *Pour tout ordinal ι, on a $E_\iota(\mathscr{F}) = \lambda(\mathscr{F}_\iota) \cap c(\mathscr{F})$. On a aussi: $E_{-1}(\mathscr{F}) = \emptyset$, $E_0(\mathscr{F}) = G_{-1}(\mathscr{F})$, si ι n'est pas un ordinal limite alors $E_\iota(\mathscr{F}) = E_{\iota-1}(\mathscr{F}) \cup G_{\iota-1}(\mathscr{F})$ avec $E_{\iota-1}(\mathscr{F}) \cap G_{\iota-1}(\mathscr{F}) = \emptyset$, et si ι est un ordinal limite alors $E_\iota(\mathscr{F}) = \bigcup_{\kappa<\iota} E_\kappa(\mathscr{F})$.*

Propriété 2.11. *Si ι n'est pas un ordinal limite et si $\iota \neq 0$ alors pour tout élément $\mathscr{P}$ de $E_\iota(\mathscr{F})$ et pour tout élément $\mathscr{P}'$ de $c(\mathscr{F})$ tel que $\mathscr{P}' \lneq \mathscr{P}$, on a $\mathscr{P}' \in E_{\iota-1}(\mathscr{F})$.*

Démonstration. Si on a $\mathscr{P} \in E_{\iota-1}(\mathscr{F})$ le résultat est immédiat. D'après la propriété 2.10, si on a maintenant $\mathscr{F} \in G_{\iota-1}(\mathscr{F})$ alors, comme il existe un A-module M qui est $\mathscr{P}$-cocritique et $\mathscr{F}_{\iota-1}$-cocritique (d'après la Propriété 2.9), et comme tout A-module $\mathscr{P}'$-cocritique contient un sous-module non nul image homomorphe propre d'un sous-module du A-module $\mathscr{P}$-cocritique M (d'après la Proposition 1.3 de [16]), aucun A-module $\mathscr{P}'$-cocritique ne peut être $\mathscr{F}_{\iota-1}$-cocritique ce qui entraîne qu'on a $\mathscr{P}' \notin G_{\iota-1}(\mathscr{F})$ d'où l'on déduit $\mathscr{F}_{\iota-1} \not\leq \mathscr{P}'$ ce qui implique $\mathscr{P}' \in E_{\iota-1}(\mathscr{F})$. □

Propriété 2.12. *Pour tout ordinal ι, on a $E_\iota(\mathscr{F}) \subseteq U_\iota(\mathscr{F})$.*

Démonstration. Par récurrence transfinie. Tout d'abord on a évidemment $E_0(\mathscr{F}) \subseteq U_0(\mathscr{F})$ car $G_{-1}(\mathscr{F})$ est contenu dans l'ensemble des éléments minimaux de $c(\mathscr{F})$ (cf. Propriété 2.9). Considérons un ordinal $i>0$ et supposons qu'on a $E_\kappa(\mathscr{F}) \subseteq U_\kappa(\mathscr{F})$ pour tout ordinal $\kappa<\iota$. Si ι est un ordinal limite on a

$$E_\iota(\mathscr{F}) = \bigcup_{\kappa<\iota} E_\kappa(\mathscr{F}) \subseteq \bigcup_{\kappa<\iota} U_\kappa(\mathscr{F}) = U_\iota(\mathscr{F})$$

(d'après la Propriété 2.10 et l'hypothèse de récurrence). Si ι n'est pas un ordinal limite on a $E_\iota(\mathscr{F}) \subseteq U_\iota(\mathscr{F})$ d'après la propriété 2.11 et l'hypothèse de récurrence. □

Propriété 2.13. *Si la hauteur de $\mathscr{F}$ est définie on a*

$$c(\mathscr{F}) = \bigcup_\iota G_\iota(\mathscr{F}) = \bigcup_\iota E_\iota(\mathscr{F}) = E_\omega(\mathscr{F})$$

et le plus petit ordinal ι tel que $c(\mathscr{F}) = E_\iota(\mathscr{F})$ est $\iota =$ Ht($\mathscr{F}$). *De plus, dans ce cas-là, on a $\mathscr{F}_\kappa = d(G_\kappa(\mathscr{F}))$ pour tout ordinal κ.*

Propriété 2.14. *Si l'anneau A vérifie la condition* (Min.) *à droite, si tout élément de $\mathscr{T}(A)$ est semi-premier, si $\mathscr{P}$ est un élément de $c(\mathscr{F})$ et si $\alpha(\mathscr{P})$ est le filtre* *localisant copremier associé à* $\mathscr{P}$ (*cf.* [20], [23]) *alors, pour tout ordinal* ι, *on a* $\mathscr{P} \in E_\iota(\mathscr{F})$ *si et seulement si* $\alpha(\mathscr{P}) \leq \mathscr{F}_\iota$.

Démonstration. Si $\mathscr{P} \in E_\iota(\mathscr{F})$, il existe $\kappa < \iota$ tel que $\mathscr{F}_\kappa \leq \mathscr{P}$ et $\mathscr{F}_{\kappa+1} \not\leq \mathscr{P}$, et, d'après la Proposition 3.1 de [23], on obtient $\alpha(\mathscr{P}) \leq \mathscr{F}_{\kappa+1} \leq \mathscr{F}_\iota$. Réciproquement si on a $\alpha(\mathscr{P}) \leq \mathscr{F}_\iota$ alors, d'après la Proposition 3.1 de [23], on a $\mathscr{F}_\iota \not\leq \mathscr{P}$ c'est-à-dire $\mathscr{P} \in \lambda(\mathscr{F}_\iota)$; par suite on a $\mathscr{P} \in E_\iota(\mathscr{F})$ d'après la Propriété 2.10. □

On a déjà vu qu'un filtre localisant $\mathscr{F}$ d'un anneau A est dit clair si tout élément minimal de $c(\mathscr{F})$ est de la forme $\chi(M)$ avec M A-module $\mathscr{F}$-cocritique (voir [23, p. 97]). Les filtres localisants premiers de A sont clairs.

Propriété 2.15. *Si l'anneau A vérifie la condition* (Min.) *à droite et si* $\mathscr{F}$ *est un filtre localisant clair de A alors, pour tout ordinal* ι, *on a*

$$E_\iota(\mathscr{F}) = U_\iota(\mathscr{F}) \cap E_\omega(\mathscr{F}).$$

Démonstration. D'après la Propriété 2.12 on a $E_\iota(\mathscr{F}) \subseteq U_\iota(\mathscr{F})$, et il suffit donc ici de montrer qu'on a $U_\iota(\mathscr{F}) \cap E_\omega(\mathscr{F}) \subseteq E_\iota(\mathscr{F})$. Procédons par récurrence transfinie. Puisque $\mathscr{F}$ est clair on a $U_0(\mathscr{F}) \subseteq E_0(\mathscr{F})$ d'après la Propriété 2.9. Considérons un ordinal ι et supposons que $U_\kappa(\mathscr{F}) \cap E_\omega(\mathscr{F}) \subseteq E_\kappa(\mathscr{F})$ pour tout ordinal $\kappa < \iota$. Si ι est un ordinal limite il vient

$$U_\iota(\mathscr{F}) \cap E_\omega(\mathscr{F}) = \bigcup_{\kappa<\iota} (U_\kappa(\mathscr{F}) \cap E_\omega(\mathscr{F})) \subseteq \bigcup_{\kappa<\iota} E_\kappa(\mathscr{F}) = E_\iota(\mathscr{F}).$$

Si ι admet un prédécesseur, considérons $\mathscr{P} \in U_\iota(\mathscr{F}) \cap E_\omega(\mathscr{F})$; il existe alors un ordinal κ tel que $\mathscr{P} \in G_\kappa(\mathscr{F})$ et comme A vérifie la condition (Min.) on déduit de la Propriété 2.9 qu'il existe un idéal surcritique I de A qui est $\mathscr{P}$-critique et $\mathscr{F}_\kappa$-critique. Si on a $\kappa \geq \iota$, on obtient $\iota - 1 < \kappa$ et ainsi I n'est pas $\mathscr{F}_{\iota-1}$-critique; comme on a $\mathscr{F}_{\iota-1}(A/I) = 0$ il existe donc un sous-module propre non nul J/I du A-module à droite A/I tel que $\mathscr{F}_{\iota-1}(A/J) \neq A/J$. En fait on peut supposer qu'on a $\mathscr{F}_{\iota-1}(A/J) = 0$. Comme on a $J \in \mathscr{F}_\kappa$ considérons κ' le plus petit ordinal tel que $\mathscr{F}_{\kappa'}(A/J) \neq 0$; il est alors immédiat que κ' n'est pas un ordinal limite et on a $\iota - 1 < \kappa' \leq \kappa$. De $\mathscr{F}_{\kappa'-1}(A/J) = 0$ et $\mathscr{F}_{\kappa'}(A/J) \neq 0$ on déduit que A/J contient un sous-module $\mathscr{F}_{\kappa'-1}$-cocritique et par suite il existe x élément de A n'appartenant pas à J tel que l'idéal (à droite) $J . \cdot x$ est $\mathscr{F}_{\kappa'-1}$-critique. On a alors la relation $I . \cdot x \subseteq J . \cdot x$, dans laquelle $I . \cdot x$ est un idéal surcritique et $J . \cdot x$ un idéal critique ce qui entraîne, d'après la Proposition 3.2 de [23], qu'on a $\chi(A/J . \cdot x) \leq \mathscr{P}$. Comme on a $\chi(A/J . \cdot x) \in G_{\kappa'-1}(\mathscr{F})$ (d'après la Propriété 2.9) et $\mathscr{P} \in G_\kappa(\mathscr{F})$ avec $\kappa' - 1 < \kappa$, on obtient $\chi(A/J . \cdot x) \neq \mathscr{P}$. De l'hypothèse $\mathscr{P} \in U_\iota(\mathscr{F})$ on déduit alors $\chi(A/J . \cdot x) \in U_{\iota-1}(\mathscr{F})$ ce qui entraîne $\chi(A/J . \cdot x) \in E_{\iota-1}(\mathscr{F})$: contradiction car on a $\chi(A/J . \cdot x) \in G_{\kappa'-1}(\mathscr{F})$ qui implique $\chi(A/J . \cdot x) \notin E_{\kappa'-1}(\mathscr{F})$ (d'après la Propriété 2.10) d'où l'on déduit $\chi(A/J . \cdot x) \notin E_{\iota-1}(\mathscr{F})$ puisque $\iota - 1 \leq \kappa' - 1$. En conséquence la relation $\kappa \geq \iota$ n'est pas vérifiée et on a donc $\kappa < \iota$. Ceci implique $\mathscr{P} \in E_\iota(\mathscr{F})$ puisqu'on a $\mathscr{P} \in G_\kappa(\mathscr{F})$ et $G_\kappa(\mathscr{F}) \subseteq E_\iota(\mathscr{F})$. D'où la relation $U_\iota(\mathscr{F}) \cap E_\omega(\mathscr{F}) \subseteq E_\iota(\mathscr{F})$. Le résultat est donc démontré. □

Si $\mathcal{F}$ est un filtre localisant d'un anneau A alors il est immédiat de démontrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des éléments $\mathcal{P}$ de $c(\mathcal{F})$ tels qu'il existe une chaîne $\mathcal{P}_n \underset{\neq}{<} \mathcal{P}_{n-1} \underset{\neq}{<} \cdots \underset{\neq}{<} \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ dans $c(\mathcal{F})$ et tels qu'il n'existe aucune chaîne $\mathcal{P}_m \underset{\neq}{<} \mathcal{P}_{m-1} \underset{\neq}{<} \cdots \underset{\neq}{<} \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ dans $c(\mathcal{F})$ avec $m > n$, est l'ensemble $U_n(\mathcal{F}) - U_{n-1}(\mathcal{F})$. Si l'anneau A vérifie la condition (Min.) à droite et si la hauteur de $\mathcal{F}$ est définie alors, avec ce qui précède, on a $U_n(\mathcal{F}) - U_{n-1}(\mathcal{F}) = G_{n-1}(\mathcal{F})$.

En conséquence si la hauteur d'un filtre localisant $\mathcal{F}$ d'un anneau A est définie et est égale à un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, alors toute chaîne d'éléments de $c(\mathcal{F})$ possède au plus $n+1$ éléments; réciproquement si l'anneau A vérifie la condition (Min.) à droite, si la hauteur d'un filtre localisant $\mathcal{F}$ de A est définie et si toute chaîne d'éléments de $c(\mathcal{F})$ possède au plus $n+1$ éléments, alors on a $\mathrm{Ht}(\mathcal{F}) \leq n$.

Enfin pour terminer ce paragraphe signalons que les résultats et les propriétés établies ci-dessus généralisent des résultats de [15], [16], [5], [22] et [23]. Nous utiliserons certains de ces résultats dans le paragraphe suivant où nous utiliserons la notion de hauteur d'une localisation première.

3. Extension de la condition S_n (de Serre; [24, p. 176]) et exemples

Par extension de la condition de Serre (voir [24, p. 176]), nous dirons qu'*un anneau A vérifie la condition S_n à droite*, pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, si on a, pour tout $\mathcal{P} \in \mathrm{Speg}(A)$:

$$\begin{cases} \mathrm{prof}_{\mathcal{P}}(A) = \mathrm{Ht}(\mathcal{P}) & \text{quand } \mathrm{Ht}(\mathcal{P}) < n, \\ \mathrm{prof}_{\mathcal{P}}(A) \geq n & \text{quand } \mathrm{Ht}(\mathcal{P}) \geq n. \end{cases}$$

Proposition 3.1. *Si A est un anneau tel que tout filtre localisant (à droite) soit semi-premier et si A vérifie la condition S_{n+1} à droite, alors on a:*

(i) *Un A-module N est de $\chi_n(A)$-torsion si et seulement si le module localisé $N_{\mathcal{P}}$ est nul pour tout $\mathcal{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ tel que $\mathrm{Ht}(\mathcal{P}) \leq n$.*

(ii) *Les idéaux (à droite) surcritiques I de A qui appartiennent à $\chi_n(A)$ sont ceux tels que $\mathrm{Ht}(\chi(A/I)) \geq n+1$.*

Démonstration. (i) N est de $\chi_n(A)$-torsion si et seulement si on a $\mathrm{Supp}(N) \subseteq \lambda(\chi_n(A))$ (d'après la Proposition 2.2.1 de [22] ou la fin de la page 84 de [23]). Or, pour $\mathcal{P} \in \mathrm{Speg}(A)$, on a $\mathcal{P} \in \lambda(\chi_n(A))$ si et seulement si $\mathrm{prof}_{\mathcal{P}}(A) \geq n+1$ ce qui équivaut, d'après la condition S_{n+1}, à $\mathrm{Ht}(\mathcal{P}) \geq n+1$. Le résultat s'obient alors immédiatement.

(ii) Soit I un idéal surcritique de A et posons $\mathcal{P} = \chi(A/I)$. On a donc $V(I) = \{\mathcal{P}' \in \mathrm{Speg}(A) \mid \mathcal{P}' \leq \mathcal{P}\}$, et le résultat se déduit alors immédiatement de la condition S_{n+1} et du Corollaire 1.6. □

Cette Proposition 3.1 généralise donc la Proposition 6.8 de [24, p. 176].

Notons aussi que la condition (ii) de la Proposition 3.1 est surtout importante pour les anneaux A qui vérifient en plus la condition (Min.) à droite car, d'après le Théorème 3.5 de [23], les filtres localisants sont alors caractérisés par les idéaux surcritiques qui leur appartiennent.

Donnons maintenant des exemples:

Exemple 3.2. *Si A est un anneau premier noethérien à droite, alors A vérifie la condition* S_1 *à droite.*

Démonstration. Si $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ alors, d'après [18] (ou [17]), il vient $\mathscr{P} \leq \chi(A)$, et $\mathscr{P}$ élément maximal de $\mathrm{Speg}(A)$ équivaut à $\mathscr{P} = \chi(A)$ ce qui est équivalent à $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(A) = 0$; d'autre part, d'après la Remarque 2.2, on a $\mathscr{P}$ élément maximal de $\mathrm{Speg}(A)$ équivaut à $\mathrm{Ht}(\mathscr{P}) = 0$. D'où le résultat. □

Dans les deux exemples suivants toutes les hypothèses sur l'anneau sont prises à droite et à gauche.

Exemple 3.3. *Si A est un anneau premier, noethérien, héréditaire, quasi-local et non simple* (*cf.* [14]), *alors A vérifie la condition* S_n *à droite et à gauche pour tout entier naturel* $n \geq 0$ (*et A vérifie la condition* (Min.) *à droite et à gauche*).

Démonstration. D'après le Lemme 2.5 de [14, p. 52] l'anneau A est un ordre d'Asano régulier de son anneau classique de fractions S. Considérons $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ et l'idéal bilatère premier $\mathrm{Ter}(\mathscr{P}) = P$ (plus grand élément de l'ensemble des idéaux bilatères de A qui n'appartiennent pas à $\mathscr{P}$; cf. [17], [18]). Comme A est noethérien et héréditaire, tout filtre localisant de A est plat ('perfect' [24, p. 229]); d'après [13] et la démonstration de la Proposition IV.1.7 de [14], si I est un idéal à droite de A qui appartient à $\chi(A/P)$ alors il existe un idéal bilatère N non contenu dans P tel que $N \subseteq I$ ce qui implique qu'on a $N \in \mathscr{P}$ et par suite $I \in \mathscr{P}$. On a donc $\mathscr{P} = \chi(A/P)$. Ainsi $P \to \chi(A/P)$ est une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux bilatères premiers de A et $\mathrm{Speg}(A)$ (cf. [18]). Les seuls idéaux bilatères premiers de A sont 0 et le radical de Jacobson $J(A)$ de A (voir la démonstration de la Proposition III.2.4 de [14]). Comme on a $\chi(A/J(A)) = \{A\} = \xi$, on obtient $\mathrm{Speg}(A) = \{\xi, \chi(A)\}$ et $\mathscr{T}(A) = \{\xi, \chi(A), \chi\}$. On a de plus $\mathrm{Ht}(\chi(A)) = 0$ et $\mathrm{Ht}(\xi) = 1$. D'après l'Exemple 3.2 on a $\mathrm{prof}_{\chi(A)}(A) = 0 = \mathrm{Ht}(\chi(A))$. Montrons qu'on a $\mathrm{prof}_{\xi}(A) = 1 = \mathrm{Ht}(\xi)$. Si on considère une résolution injective minimale $0 \to A \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ de A, on a $E_0 = S$ et E_1 est l'enveloppe injective de S/A; comme $S = E_0$ est sans $\chi(A)$-torsion, comme S/A est de $\chi(A)$-torsion et comme $\chi(A)$ est la localisation de Goldie qui est stable par enveloppes injectives, on obtient que E_1 est de $\chi(A)$-torsion ce qui implique qu'on a $\chi(E_1) \neq \chi(A)$ et par suite on obtient $\chi_1(A) = \chi(A) \wedge \chi(E_1) = \xi$. En conséquence il vient $\mathrm{prof}_{\xi}(A) = 1$ et donc $\mathrm{prof}_{\xi}(A) = \mathrm{Ht}(\xi)$. Donc A vérifie la condition S_n à droite et à gauche pour tout entier naturel $n \geq 0$, et il est évident que A vérifie la condition (Min.) à droite et à gauche d'aprés ce qui précède et d'après le Théorème 3.4 de [23]. □

En particulier le localisé par rapport à un c-idéal premier d'une algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$, d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps commutatif K de dimension finie sur K, vérifie les hypothèses de l'Exemple 3.3 (voir [14]). D'autres exemples peuvent aussi être trouvés dans [14].

Exemple 3.4. *Si A est un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de son anneau classique de fractions S (cf. [14]), alors A vérifie la condition S_2 à droite et à gauche.*

Démonstration. D'après l'Exemple 3.2 l'anneau A vérifie la condition S_1 à droite et à gauche, et on a, pour $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$:

$$\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{P} = \chi(A) \Leftrightarrow \mathrm{Ht}(\mathscr{P}) = 0.$$

– Montrons que la molécule associée à l'idéal bilatère premier 0 de A (cf. [26], [17] et [18]) est $\{\chi(A)\}$. Considérons donc $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ tel que $\mathrm{Ter}(\mathscr{P}) = 0$ (où $\mathrm{Ter}(\mathscr{P})$ est le plus grand élément de l'ensemble des idéaux bilatères de A qui n'appartiennent pas à $\mathscr{P}$; cf. [17], [18]). D'après la Proposition IV.2.6 et le Corollaire IV.2.7. de [14] on a alors $A_{\mathscr{P}} = A_{\mathscr{P}'} = A_0 = S$ avec les notations de [14]. Pour tout idéal à droite J de A tel que $J \in \chi(A)$ il existe c élément régulier de A tel que $c \in J$ (d'après le théorème de Goldie car J est essentiel dans A); de $A_{\mathscr{P}} = S$ on déduit alors qu'il existe $I \in \mathscr{P}$ tel que $c^{-1}I \subseteq A$ ce qui implique qu'on a $I \subseteq cA \subseteq J$ d'où l'on déduit $J \in \mathscr{P}$. Donc on a $\mathscr{P} = \chi(A)$ (car on a $\mathscr{P} \leq \chi(A)$ d'après [17], [18]). Ainsi la molécule associée à l'idéal bilatère premier 0 de A est $\{\chi(A)\}$.

– Désignons par $\mathscr{S}$ l'ensemble des c-idéaux entiers premiers de A c'est-à-dire, d'après la Proposition II.2.2 de [14], l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de A. Si $E(N)$ désigne l'enveloppe injective d'un A-module N alors on sait, d'après le Théorème 4.4.5 de [3], qu'on a $E(S/A) \simeq \bigoplus_{P \in \mathscr{S}} E(A/P)$ car A est un anneau de Krull; on obtient alors

$$\chi_1(A) = \chi(E(S/A)) = \bigwedge_{P \in \mathscr{S}} \chi(E(A/P)).$$

– Considérons $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ tel que $\mathrm{Ht}(\mathscr{P}) = 1$. D'après ce qui précède on a donc $\mathscr{P} \neq \chi(A)$ et $\mathrm{Ter}(\mathscr{P}) \neq 0$. Posons $P = \mathrm{Ter}(\mathscr{P})$. D'après [17] ou [18] on a alors $\mathscr{P} \leq \chi(A/P)$, $\chi(A/P) \in \mathrm{Speg}(A)$, et $\chi(A/P) \lneq \chi(A)$. Comme $\mathrm{Ht}(\mathscr{P}) = 1$ il résulte de la fin du Paragraphe 2 qu'on a $\mathscr{P} = \chi(A/P)$; il en résulte aussi, avec le Lemme 1 de [18], qu'on a $P \in \mathscr{S}$.

– Considérons $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ tel que $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(A) = 1$; on a alors $\chi_1(A) \leq \mathscr{P} \lneq \chi(A)$. De $\mathscr{P} \lneq \chi(A)$ on déduit qu'on a $\mathrm{Ter}(\mathscr{P}) \neq 0$, et de $\chi_1(A) \leq \mathscr{P}$ on déduit qu'on a alors $\mathrm{Ter}(\mathscr{P}) \notin \chi_1(A)$ ce qui implique qu'il existe $P \in \mathscr{S}$ tel que $\mathrm{Ter}(\mathscr{P}) \subseteq P$ (d'après ce qui précède et d'après [17], [18]). Par suite on a $\mathrm{Ter}(\mathscr{P}) = P$ et $\mathscr{P} \leq \chi(A/P)$ d'après [17] ou [18]. Si on désigne par $C(P)$ la partie multiplicative des éléments réguliers modulo P alors, si I est un idéal à droite de A tel que $I \in \chi(A/P)$, on a $I \cap C(P) \neq \emptyset$ (d'après [13]) ce qui implique, d'après le Lemme 5.4.8 de [3], qu'on a $\mathrm{Ann}_A(A/I) \not\subseteq P$ d'où l'on déduit $\mathrm{Ann}_A(A/I) \in \mathscr{P}$ et par suite $I \in \mathscr{P}$ car $\mathrm{Ann}_A(A/I) \subseteq I$. Ainsi on a $\mathscr{P} = \chi(A/P)$ avec $P \in \mathscr{S}$.

- Soit enfin $P \in \mathscr{D}$. Comme on a $\chi_1(A) \leq \chi(A/P) \lneq \chi(A)$ on obtient $\mathrm{prof}_{\chi(A/P)}(A) = 1$. D'après les résultats du Paragraphe IV.2 de [14], le filtre localisant $\chi(A/P)$ est plat et l'anneau localisé vérifie les hypothèses de l'Exemple 3.3 (voir le Théorème IV.2.15 de [14] et sa démonstration); donc d'après la Proposition 2.7 et la démonstration de l'Exemple 3.3 on obtient $\mathrm{Ht}(\chi(A/P)) = 1$. Ainsi on a $\mathrm{prof}_{\chi(A/P)}(A) = 1 = \mathrm{Ht}(\chi(A/P))$.

Donc A vérifie la condition S_2 à droite et, de même, à gauche. □

Cet Exemple 3.4 généralise l'Exemple 2 de [24, p. 176], et avec la Proposition 3.1 on généralise alors la Proposition 6.10 de [24, p. 177]:

Corollaire 3.5. *Si A est un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de son anneau classique de fractions S (cf. [14]), alors un A-module à droite N est de $\chi_1(A)$-torsion si et seulement si le module localisé $N_{\mathscr{P}}$ est nul pour tout $\mathscr{P} \in \mathrm{Speg}(A)$ tel que $\mathrm{Ht}(\mathscr{P}) \leq 1$.*

Des exemples concrets d'anneaux qui vérifient les hypothèses des exemples précédents figurent dans [14].

Pour terminer donnons un contre-exemple:

Contre-exemple 3.6. *Si A est l'anneau des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 sur un corps, alors A ne vérifie pas la condition S_1 à droite (et vérifie la condition (Min.) à droite).*

Démonstration. On a vu dans [20], [22] et [23] que A vérifie la condition (Min.) à droite. Considérons les idéaux à droite maximaux de A:

$$I = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad J = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \beta' \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix}\right\},$$

et posons $\mathscr{P} = \chi(A/I)$ et $\mathscr{P}' = \chi(A/J)$. On a $\mathrm{Speg}(A) = \{\mathscr{P}, \mathscr{P}'\}$ et $\mathscr{T}(A) = \{\xi, \mathscr{P}, \mathscr{P}', \chi\}$. On a en fait $\mathscr{P} = \chi(A)$ et on a $\mathrm{Ht}(\mathscr{P}) = \mathrm{Ht}(\mathscr{P}') = 0$. On a $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}}(A) = 0$, mais on a $\mathrm{prof}_{\mathscr{P}'}(A) \neq 0$ car $\mathscr{P}' \in \lambda(\chi(A))$. Donc A ne vérifie pas la condition S_1 à droite. □

Références

[1] T. Albu and C. Nastasescu, Local cohomology and torsion theory (Algebra-Berichte, "Seminar F. Kash und B. Pareigis", Math. Institut der Universität München, Bericht 37, 1979).

[2] P.J. Cahen, Commutative torsion theory, Trans. Amer. Math. Soc. 184 (1973) 73–85.

[3] M. Chamarie, Anneaux de Krull non commutatifs, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université Claude-Bernard, Lyon I, No. 81-20 (29 mai 1981).

[4] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323–448.

[5] J.S. Golan et J. Raynaud, Dimension de Gabriel et TTK-dimension de modules, C.R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) 278 (1974) 1603–1606.

[6] J.S. Golan, Localisation of Noncommutative Rings (Marcel Dekker, New York, 1975).

[7] J.S. Golan and J. Raynaud, Derived functors of the torsion functor and local cohomology of non-commutative rings, J. Austral. Math. Soc., à paraître.

[8] O. Goldman, Rings and modules of quotients, J. Algebra 13 (1969) 10-47.

[9] R. Gordon and J.C. Robson, Krull dimension, Memoir Amer. Math. Soc. 133 (1973).

[10] A. Grothendieck, Local Cohomology (Notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. 41 (Springer, Berlin, 1967).

[11] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. 52 (Springer, New York, 1977).

[12] J. Lambek, Torsion Theories, Additive Semantics and Rings of Quotients, Lecture Notes in Math. 177 (Springer, New York, 1971).

[13] J. Lambek and G. Michler, The torsion theory at a prime ideal of a right noetherian ring, J. Algebra 25 (1973) 364-389.

[14] G. Maury et J. Raynaud, Ordres Maximaux au Sens de K. Asano, Lecture Notes in Math. 808 (Springer, Berlin, 1980).

[15] J. Raynaud, Localisations stables à droite et anneaux semi-noethériens à droite, C.R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) 275 (1972) 13-16.

[16] J. Raynaud, Localisations et anneaux semi-noethériens à droite, Publ. Dép. Math. Lyon 8(3) (1971) 77-112.

[17] J. Raynaud, Quelques résultats sur les localisations, C.R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) 277 (1973) 299-302.

[18] J. Raynaud, Une remarque sur les localisations premières d'un anneau noethérien à droite, Archiv der Math. 26 (1) (1975) 20-22.

[19] J. Raynaud, Quelques propriétés des localisations, Comm. Algebra 2(3) (1974) 261-277.

[20] J. Raynaud, Localisations et topologie de Stone, C.R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) 282 (1976) 1335-1338.

[21] J. Raynaud, Localisations stables par enveloppes injectives, C.R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) 282 (1976) 1407-1410.

[22] J. Raynaud, Localisations et spectres d'anneaux, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université Claude-Bernard, Lyon I, No. 76-40 (21-9-1976).

[23] J. Raynaud, Localisations premières et copremières. Localisations stables par enveloppes injectives, in: F. Van Oystaeyen, ed., Ring Theory: Proc. 1977 Antwerp Conf., Lecture Notes in Pure Appl Math. 40 (Marcel Dekker, New York, 1978) 81-111.

[24] B. Stenstrom, Rings of Quotients, Grundlehren Math. Wissensch. 217 (Springer, Berlin, 1975).

[25] H.H. Storrer, Torsion theories and dominant dimension, Appendix in [12].

[26] H.H. Storrer, On Goldman's primary decomposition, Tulane Ring Year 70/71, Lecture Notes in Math. 246 (Springer, New York, 1972) 617-661.

[27] F. Van Oystaeyen, Prime Spectra in Non-commutative Algebra, Lecture Notes in Math. 444 (Springer, Berlin, 1975).

[28] F. Van Oystaeyen and A. Verschoren, Non-commutative Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. 887 (Springer, Berlin, 1981).

[29] J. Raynaud, Profondeur, hauteur et localisations, C.R. Acad. Sci. Paris (Ser. I), 295 (1982) 39-42.